**Федеральное государственное образовательное**

**бюджетное учреждение**

**высшего образования**

**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ**

**ФЕДЕРАЦИИ»**

**(Финансовый университет)**

**Факультет**

**информационных технологий и анализа больших данных**

**Домашнее задание № 7**

«Методы отсекающих плоскостей»

Студенты группы ПМ19-2:

Жигулина Юлия

Коротенко Виолетта

Морозов Михаил

Пономаренко Александр

Васильева Александра

Аракелян Рушан

Брашич Илья

Руководитель:

Аксенов Дмитрий Андреевич

Москва 2022

Содержание

1. Математическая модель 3
   1. Метод Гомори 3
   2. Метод ветвей и границ 3
2. Алгоритмы 6
   1. Метод Гомори 6
   2. Метод ветвей и границ 6
3. Математическая модель
   1. Метод Гомори

Метод Гомори является одним из методов отсечения, идея данного метода заключается в следующем. Решается вспомогательная задача линейного программирования (ЗЛП), которую получают из исходной целочисленной задачи линейного программирования(ЦЗЛП) отбросив условие целочисленности переменных. Если найденное оптимальное решение вспомогательной ЗЛП является целочисленным, то оно и будет и решением исходной ЦЗЛП. В противном случае, если полученное решение вспомогательной задачи не целочисленное, то от решенной ЗЛП необходимо перейти к новой вспомогательной ЗЛП присоединив условие линейного ограничения, удовлетворяющее целочисленности исходной ЦЗЛП и не удовлетворяющее полученному нецелочисленному решению вспомогательной ЗЛП. Данное дополнительное условие целочисленности определяет некоторую отрезающую плоскость и называется правильным ограничением. Присоединяем новые правильные ограничения к начальной вспомогательной ЗЛП до тех пор, пока на некотором шаге не будет получено целочисленное решение вспомогательной задачи, являющееся оптимальным решением исходной ЦЗЛП. Построение правильного ограничения в методе Гомори осуществляется следующим образом. Пусть на последней итерации симплекс-метода при решении вспомогательной ЗЛП непрямые ограничения этой задачи приобрели вид:

и, таким образом, решением вспомогательной ЗЛП будет вектор. Пусть существует номер такой, что - дробь, и, - дробная часть . Тогда правильное ограничение по методу Гомори задается неравенством:.

* 1. Метод ветвей и границ

Пусть рассматривается задача вида где  *–* вещественная функция, а  *–* конечное множество допустимых решений. Пусть . Функцию , ставящую в соответствие множеству разбиение его на подмножества *,* будем называть ветвлением.

Вещественная функция называется *нижней границей* для *d*, если

1. на одноэлементном множестве {*x*} верно равенство Алгоритм, реализующий метод ветвей и границ, состоит из последовательности однотипных шагов. На каждом шаге известен рекорд и подмножества непросмотренных решений. В начале работы алгоритма *–* произвольный элемент множества или пустое множество (на пустом множестве положим значение функционала равным бесконечности).

На каждом шаге алгоритм начинает работу с проверки элементов разбиения. Пусть проверяется множество*.* Множествоотсекается в одном из двух, последовательно проверяемых случаев:

1. если *;*
2. если и найден такой элемент , что *.*

В случае bпроисходит смена рекорда.  
Пусть *–* неотсеченные множества (будем считать, что отсечены множества с номерами ).

В случае алгоритм заканчивает работу, и в качестве решения задачи принимается рекорд . При среди множеств выбирается множество для нового ветвления. Пусть таковым является множество. Тогда осуществляется ветвление в результате которого получаем список множеств , . Эти множества нумеруются числами от 1 до *L,* и начинается новый шаг алгоритма.

Нетрудно убедиться в том, что описанный алгоритм находит оптимальное решение за конечное число шагов.

Описанная последовательность действий является общей схемой метода ветвей и границ для решения задач на минимум. При решении конкретной задачи следует указать способы построения нижней и верхней оценок, метод ветвления, а также правило выбора перспективного множества для разбиения.

При определении «перспективного» элемента разбиения в основном применяются две схемы: одновременного (многостороннего) и одностороннего ветвления. При одновременном ветвлении функция *b* может быть применена к любому элементу разбиения. Часто в качестве такого элемента выбирается подмножество с минимальной нижней границей:

При одностороннем ветвлении номер разбиваемого подмножества известен заранее. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что «перспективным» является подмножество *.* Отметим, что при одно- сторонней схеме ветвления нет необходимости запоминать все элементы разбиения, достаточно иметь информацию о первом элементе разбиения и объединении остальных элементов.

Разбиения множеств решений (ветвление) удобно представлять в виде дерева решений. На рис. 1 приведены примеры одновременной (*а*) и односторонней (*б*) схем ветвления. Каждая вершина дерева соответствует некоторому подмножеству решений. Дуги, исходящие из вершины, означают, что на некотором шаге это подмножество отсечь не удалось и оно было разбито на подмножества. Вершины, в которые входят эти дуги, соответствуют подмножествам, полученным в результате ветвления. Зачеркнутые висячие вершины означают отсеченные подмножества. Незачеркнутые висячие вершины соответствуют непросмотренным множествам, среди которых на следующем шаге алгоритма выбирается подмножество для дальнейшего ветвления.

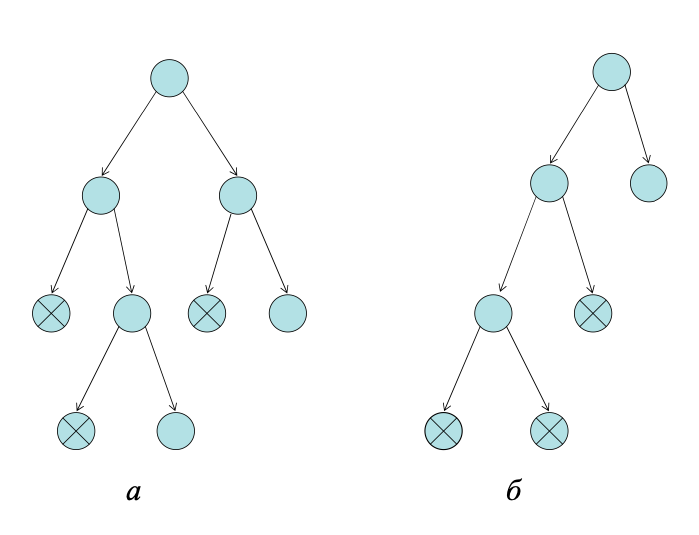


Рисунок 1

В схеме одностороннего ветвления выбирается первая (левая) вершина на нижнем уровне, а для схемы одновременного ветвления такой вершиной может быть любая. Алгоритм заканчивает работу, если зачеркнуты все висячие вершины дерева ветвлений.

Графическое представление метода ветвей и границ иллюстрирует его суть – отсечение ветвей дерева поиска, которое осуществляется на основании сравнения нижней границы и значения функционала на рекорде. Это объясняет название метода.

2. Алгоритмы

* 1. Метод Гомори.

Входные данные

*f(x)* – целевая функция,

– ограничения

1. Используя симплекс – метод, без учета требования целочисленности, получаем набор равенств:

где – переменные базиса, а – свободные переменные.

1. Вводим новое ограничение ( соответствует переменной , которая в оптимальном плане имеет максимальную дробную часть):

,

- целая часть.

1. Если при решении с новым ограничением получено целочисленное решение, задача решена. В противном случае необходимо повторить второй этап
   1. Метод ветвей и границ

Задача:

Входные данные:

*F(x)* – целевая функция,

– ограничения

Алгоритм:

1. Решаем задачу (1) как ЛП (методом из ТЗ-6), получая решение ,
2. Если , то выводим . Если нет, то переходим к 3.
3. Выбираем из одно из не целых чисел . Округляем его вверх и вниз до целого. Таким образом получаем и .
4. К корневой задаче добавляем условие и решаем задачу как ЛП (методом из ТЗ-6), получая решение ,
5. Если , то запоминаем и переходим к 6. Если нет решения, то переходим к 6. Если ни то, ни то, то переходим к 3.
6. К корневой задаче добавляем условие и решаем задачу как ЛП (методом из ТЗ-6), получая решение ,
7. Если , то запоминаем и переходим к 8. Если нет решения, то переходим к 8. Если ни то, ни то, то переходим к 3.
8. Если остались не решённые задачи, то переходим к 6. Если нет, то выбираем максимальное из всех запомненных и соответствующий ему вектор и выводим.